

УДК 517

О ТОЧКАХ СОВПАДЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© Е. А. Плужникова

Ключевые слова: точки совпадения; векторные накрывающие отображения; метрические пространства.

Сформулирована и доказана теорема о точках совпадения векторных накрывающего и липшицева отображений.

Приведем определения основных понятий, используемых в работе.

Будем рассматривать метрические пространства (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) . Обозначим через $B_X(x, r)$ замкнутый шар с центром в точке x радиуса $r > 0$ в пространстве X , аналогичное обозначение введем в Y (и других метрических пространствах, используемых ниже). Пусть задано число $\alpha > 0$ и отображение $F: X \rightarrow Y$.

О п р е д е л е н и е 1 [1]. Отображение F называется α -накрывающим, если для любых $r > 0$ и $u \in X$ имеет место включение

$$F(B_X(u, r)) \supseteq B_Y(F(u), \alpha r).$$

Отображение F называют *накрывающим*, если оно α -накрывающее при некотором $\alpha > 0$.

Отметим, что отображение F является α -накрывающим тогда и только тогда, когда для любых $u \in X$ и $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий уравнению $F(x) = y$ и оценке

$$\rho_X(x, u) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(y, F(u)).$$

Сформулируем основной результат — теорему о точках совпадения векторных отображений.

Пусть заданы метрические пространства (X_j, ρ_{X_j}) , (Y_j, ρ_{Y_j}) , $j = \overline{1, n}$, и определены отображения $F_i: X_i \rightarrow Y_i$, $G_i: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y_i$, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1) = G_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ F_2(x_2) = G_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \vdots \\ F_n(x_n) = G_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases} \quad (1)$$

относительно неизвестного $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^n X_j$.

Положим $X = \prod_{j=1}^n X_j$, $Y = \prod_{j=1}^n Y_j$. Пусть $\|\cdot\|$ — произвольная монотонная норма в пространстве вещественных n -мерных векторов $\mathbb{R}^n$, то есть для любых векторов $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$, $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых удовлетворяют неравенству $d_i \geq r_i$, $i = \overline{1, n}$, выполнено $\|d\| \geq \|r\|$ (например, евклидова норма $\|d\|' = \left(\sum_{i=1}^n d_i^2\right)^{1/2}$ является монотонной). Зададим метрику в X равенством

$$\rho_X(x, u) = \|(\rho_{X_1}(x_1, u_1), \rho_{X_2}(x_2, u_2), \dots, \rho_{X_n}(x_n, u_n))\|, \quad (2)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in X$, и заметим, что соответствующие разным нормам $\mathbb{R}^n$ метрики в пространстве X также будут эквивалентными (это следует из эквивалентности всех норм конечномерного пространства). Аналогично зададим метрику в пространстве Y .

Определим отображения

$$F: X \rightarrow Y, \quad F(x) = (F_i(x_i))_{i=\overline{1,n}}, \quad G: X \rightarrow Y, \quad G(x) = (G_i(x))_{i=\overline{1,n}}. \quad (3)$$

Тогда систему (1) можно записать в виде векторного уравнения

$$F(x) = G(x). \quad (4)$$

Решение данного уравнения называют *точкой совпадения отображений* F, G . В случае, когда отображение $F: X \rightarrow Y$ является α -накрывающим, а отображение $G: X \rightarrow Y$ — β -липшицевым, и $\beta < \alpha$, существование точек совпадения доказано в [1], в работах [2]–[4] исследованы свойства множества точек совпадения, рассмотрены приложения этих результатов.

Пусть заданы числа $\alpha_i > 0$, $\beta_{ij} \geq 0$, $i, j = \overline{1, n}$. Определим матрицы

$$A = \text{diag}(\alpha_i)_{n \times n}, \quad B = (\beta_{ij})_{n \times n}, \quad C = A^{-1}B = (\alpha_i^{-1}\beta_{ij})_{n \times n}. \quad (5)$$

Предположим, что выполнены условия:

- ($\mathcal{A}^n$) для всех $i = \overline{1, n}$ отображение $F_i(\cdot): X_i \rightarrow Y_i$ является α_i -накрывающим;
- ($\mathcal{B}^n$) при любых $i, j = \overline{1, n}$ для всех $x_1 \in X_1, \dots, x_{j-1} \in X_{j-1}, x_{j+1} \in X_{j+1}, \dots, x_n \in X_n$ отображение $G_i(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_n): X_j \rightarrow Y_i$ является β_{ij} -липшицевым.

Тогда отображение F будет накрывающим с константой $\alpha = \|A^{-1}\|^{-1}$, отображение G — липшицевым с константой $\beta = \|B\|$. Поэтому для применения результатов [1] к векторным отображениям (3) необходимо потребовать, чтобы $\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$. Мы покажем, каким образом этот результат можно существенно уточнить.

Обозначим через $\varrho(C)$ спектральный радиус матрицы C .

Т е о р е м а 1. Пусть метрические пространства X_j , $j = \overline{1, n}$, являются полными, выполнены условия ($\mathcal{A}^n$), ($\mathcal{B}^n$) и

- ($\mathcal{C}^n$) для любой последовательности $\{u^k\} \subset X$ из сходимостей $u^k \rightarrow u$ и $F(u^k) \rightarrow G(u)$ следует равенство $F(u) = G(u)$.

Тогда, если $\varrho(C) < 1$, то существует точка совпадения отображений F, G , определяемых соотношением (3). Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ можно так определить монотонную норму $\|\cdot\|$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, что при задании метрики в X равенством (2) для произвольного $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \in X$ существует решение $x = \xi \in X$ системы (1), удовлетворяющее оценке

$$\rho_X(\xi, u^0) \leq \left(\frac{1}{1 - \varrho(C)} + \varepsilon \right) \cdot \left\| \left(\frac{\rho_{Y_i}(G_i(u^0), F_i(u_i^0))}{\alpha_i} \right)_{i=\overline{1,n}} \right\|. \quad (6)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $\varepsilon_0 > 0$ достаточно малым, так чтобы

$$\varrho(C) + \varepsilon_0 < 1, \quad \frac{1}{1 - \varrho(C) - \varepsilon_0} - \frac{1}{1 - \varrho(C)} < \varepsilon. \quad (7)$$

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ задана евклидова норма $\|\cdot\|'$. Найдем такое натуральное m , что $\sqrt[m]{\|C^m\|'} \leq \varrho(C) + \varepsilon_0$. Определим эквивалентную норму $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ равенством [5, с. 15]

$$\|x\| = (\varrho(C) + \varepsilon_0)^{m-1} \|x\|' + (\varrho(C) + \varepsilon_0)^{m-2} \|Cx\|' + \dots + \|C^{m-1}x\|', \quad (8)$$

тогда

$$\|C\| < \varrho(C) + \varepsilon_0.$$

Зададим частичный порядок в $\mathbb{R}^n$, полагая $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \geq r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, если $d_i \geq r_i$ при любом $i = \overline{1, n}$. При такой упорядоченности линейные отображения пространства $\mathbb{R}^n$, заданные матрицами A, B, C , будут монотонными, так как элементы этих матриц неотрицательны. Кроме того, отметим, что из неравенств $d \geq r \geq 0$ для евклидовой нормы следует, что $\|d\|' \geq \|r\|'$, а вследствие неотрицательности элементов матрицы C для нормы (8) также $\|d\| \geq \|r\|$.

Рассмотрим уравнение (4), равносильное системе (1). Для нахождения решения этого уравнения предлагается следующий итерационный процесс.

Выберем произвольный элемент $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_n^0) \in X$ и вычислим $F(u^0), G(u^0)$.

Первый шаг. В силу предположения (A^n) существует элемент $u^1 = (u_1^1, u_2^1, \dots, u_n^1) \in X$ такой, что

$$F(u^1) = G(u^0)$$

и выполнено неравенство

$$\begin{aligned} &(\rho_{X_1}(u_1^1, u_1^0), \rho_{X_2}(u_2^1, u_2^0), \dots, \rho_{X_n}(u_n^1, u_n^0)) \leq \\ &\leq \left(\frac{\rho_{Y_1}(G_1(u^0), F_1(u_1^0))}{\alpha_1}, \frac{\rho_{Y_2}(G_2(u^0), F_2(u_2^0))}{\alpha_2}, \dots, \frac{\rho_{Y_n}(G_n(u^0), F_n(u_n^0))}{\alpha_n} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Второй шаг. Вычислим $G(u^1)$. Согласно предположению (B^n) имеем

$$\begin{pmatrix} \rho_{Y_1}(G_1(u^1), F_1(u_1^1)) \\ \rho_{Y_2}(G_2(u^1), F_2(u_2^1)) \\ \vdots \\ \rho_{Y_n}(G_n(u^1), F_n(u_n^1)) \end{pmatrix} \leq B \begin{pmatrix} \rho_{X_1}(u_1^1, u_1^0) \\ \rho_{X_2}(u_2^1, u_2^0) \\ \vdots \\ \rho_{X_n}(u_n^1, u_n^0) \end{pmatrix}.$$

Вследствие предположения (A^n) существует такой элемент $u^2 \in X$, что $F(u^2) = G(u^1)$ и

$$\begin{pmatrix} \rho_{X_1}(u_1^2, u_1^1) \\ \rho_{X_2}(u_2^2, u_2^1) \\ \vdots \\ \rho_{X_n}(u_n^2, u_n^1) \end{pmatrix} \leq A^{-1} \begin{pmatrix} \rho_{Y_1}(G_1(u^1), F_1(u_1^1)) \\ \rho_{Y_2}(G_2(u^1), F_2(u_2^1)) \\ \vdots \\ \rho_{Y_n}(G_n(u^1), F_n(u_n^1)) \end{pmatrix} \leq A^{-1} B \begin{pmatrix} \rho_{X_1}(u_1^1, u_1^0) \\ \rho_{X_2}(u_2^1, u_2^0) \\ \vdots \\ \rho_{X_n}(u_n^1, u_n^0) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, учитывая (5), имеем $\rho_X(u^2, u^1) \leq \|C\| \rho_X(u^1, u^0)$.

Аналогично, на *третьем шаге* для $G(u^2)$, согласно предположению (B^n) , выполнено неравенство

$$\begin{pmatrix} \rho_{Y_1}(G_1(u^2), F_1(u_1^2)) \\ \rho_{Y_2}(G_2(u^2), F_2(u_2^2)) \\ \vdots \\ \rho_{Y_n}(G_n(u^2), F_n(u_n^2)) \end{pmatrix} \leq B \begin{pmatrix} \rho_{X_1}(u_1^2, u_1^1) \\ \rho_{X_2}(u_2^2, u_2^1) \\ \vdots \\ \rho_{X_n}(u_n^2, u_n^1) \end{pmatrix}.$$

Далее, существует элемент $u^3 \in X$, для которого $F(u^3) = G(u^2)$ и

$$\begin{pmatrix} \rho_{X_1}(u_1^3, u_1^2) \\ \rho_{X_2}(u_2^3, u_2^2) \\ \vdots \\ \rho_{X_n}(u_n^3, u_n^2) \end{pmatrix} \leq A^{-1} \begin{pmatrix} \rho_{Y_1}(G_1(u^2), F_1(u_1^2)) \\ \rho_{Y_2}(G_2(u^2), F_2(u_2^2)) \\ \vdots \\ \rho_{Y_n}(G_n(u^2), F_n(u_n^2)) \end{pmatrix} \leq A^{-1} B \begin{pmatrix} \rho_{X_1}(u_1^2, u_1^1) \\ \rho_{X_2}(u_2^2, u_2^1) \\ \vdots \\ \rho_{X_n}(u_n^2, u_n^1) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\rho_X(u^3, u^2) \leq \|C\| \rho_X(u^2, u^1) \leq \|C\|^2 \rho_X(u^1, u^0)$.

Продолжая аналогичные построения, получаем последовательность элементов $u^k \in X$ таких, что

$$F(u^k) = G(u^{k-1}), \quad \rho_X(u^k, u^{k-1}) \leq \|C\|^{k-1} \rho_X(u^1, u^0).$$

Так как геометрическая прогрессия $\{\|C\|^{k-1} \rho_X(u^1, u^0)\}$ имеет знаменатель $\|C\|$, меньший единицы, то последовательность $\{u^k\}$ является фундаментальной и сходится к некоторому элементу $\xi \in X$. Имеем

$$\rho_Y(F(u^k), G(\xi)) = \rho_Y(G(u^{k-1}), G(\xi)) \leq \|B\|(\rho_X(u^{k-1}, \xi)) \rightarrow 0.$$

Таким образом, $u^k \rightarrow \xi$, $F(u^k) \rightarrow G(\xi)$ и из условия (C^n) следует, что элемент ξ является решением уравнения (4). Наконец, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в неравенстве

$$\rho_X(u^k, u^0) \leq \sum_{j=1}^k \rho_X(u^j, u^{j-1}) \leq \sum_{j=1}^k \|C\|^{j-1} \rho_X(u^1, u^0) \leq \sum_{j=1}^k (\varrho(C) + \varepsilon_0)^{j-1} \rho_X(u^1, u^0),$$

получаем, что $\rho_X(\xi, u^0) \leq (1 - \varrho(C) - \varepsilon_0)^{-1} \rho_X(u^1, u^0)$. Отсюда и из неравенств (7), (9) вытекает оценка (6). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Точка совпадения векторных отображений, о которой говорится в условии теоремы 1, может быть не единственной.

З а м е ч а н и е 2. В оценке (6) нельзя принять $\varepsilon = 0$, что подтверждает следующий

П р и м е р 1. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_1 + x_2, \\ x_2 = \frac{1}{3}x_2, \end{cases}$$

имеющую единственное решение $x = (0, 0)$. К этой системе применима теорема 1: отображения $F_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_1(x_1) = x_1$, $F_2(x_2) = x_2$, являются 1-накрывающими, а для отображений $G_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $G_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$G_1(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_1 + x_2, \quad G_2(x_1, x_2) = \frac{1}{3}x_2,$$

константы Липшица равны

$$\beta_{11} = \beta_{22} = \frac{1}{3}, \quad \beta_{12} = 1, \quad \beta_{21} = 0.$$

Составим матрицу C и найдем ее спектральный радиус:

$$C = B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \varrho(C) = \frac{1}{3}.$$

Пусть для решения рассматриваемой системы имеет место оценка (6) с $\varepsilon = 0$, то есть существует такая норма в $\mathbb{R}^2$, что для любого вектора $u^0 = (u_1^0, u_2^0) \in \mathbb{R}^2$ выполнено равенство

$$\|u^0\| = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \|u^0 - Bu^0\|,$$

равносильное соотношению

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} u_1^0 - \frac{3}{2}u_2^0 \\ u_2^0 \end{pmatrix} \right\|.$$

Из этого соотношения при $u_1^0 = 0$, $u_2^0 = -1$ с учетом свойств нормы получаем равенства

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \dots = \left\| \begin{pmatrix} \frac{3}{2}k \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

при любом $k = 0, 1, \dots$. Отсюда следует соотношение

$$2 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}k \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = k \left\| \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|$$

при любом $k = 0, 1, \dots$, которое противоречит аксиомам нормы.

Отметим, что если хотя бы одному собственному значению матрицы C , модуль которого совпадает со спектральным радиусом $\varrho(C)$ этой матрицы, соответствуют не только собственные, но и присоединенные векторы, то для любой нормы в $\mathbb{R}^n$ будет выполнено неравенство $\|C\| > \varrho(C)$ [5, с. 16], и поэтому нельзя полагать $\varepsilon = 0$ в оценке (6).

Рассмотрим частный случай теоремы 1 при $n = 1$.

Пусть определены отображения $F: X \rightarrow Y$ и $G: X \rightarrow Y$. Применяя теорему 1 к скалярному уравнению

$$F(x) = G(x), \quad (10)$$

получаем следующее утверждение — аналог теоремы [1] о точке совпадения отображений.

С л е д с т в и е 1. Пусть метрическое пространство X является полным, заданы числа $\alpha > \beta \geq 0$ и выполнены следующие условия:

- (A¹) отображение $F: X \rightarrow Y$ является α -накрывающим;
- (B¹) отображение $G: X \rightarrow Y$ является β -липшицевым;
- (C¹) для любой последовательности $\{u^k\} \subset X$ из соотношений $u^k \rightarrow u$, $F(u^k) \rightarrow G(u)$ следует равенство $F(u) = G(u)$.

Тогда для любого $u^0 \in X$ существует решение $x = \xi \in X$ уравнения (10), удовлетворяющее оценке

$$\rho_X(\xi, u^0) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \rho_Y(F(u^0), G(u^0)). \quad (11)$$

В данном случае матрицы A , B , C содержат по одному элементу $A = (\alpha)$, $B = (\beta)$, $C = (\alpha^{-1}\beta)$. Поэтому $\|C\| = \varrho(C) = \alpha^{-1}\beta < 1$. Из доказательства теоремы 1 следует, что для любого $u^0 \in X$ существует решение $x = \xi \in X$ уравнения (10), удовлетворяющее оценке

$$\rho_X(\xi, u^0) \leq (1 - \|C\|)^{-1} \|A^{-1}\| \rho_Y(F(u^0), G(u^0)),$$

очевидно, равносильной неравенству (11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнов А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416. № 2. С. 151–155.
2. Арутюнов А.В. Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1947–1950.

3. *Arutyunov A., Avakov E., Gel'Man B., Obukhovskii V., Dmitruk A.* Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2009. Т. 5. № 1. С. 105–127.
4. *Arutyunov A.V., Zhukovskiy S.E., Zhukovskiy E.S.* Covering mappings and well-posedness of nonlinear volterra equations // Nonlinear Analysis. 2011. С. 1026–1044.
5. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М., 1969. 456 с.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 13-01-90721).

Поступила в редакцию 28 октября 2013 г.

Pluzhnikova E.A. ON COINCIDENCE POINTS OF VECTOR MAPPINGS

A theorem on coincidence points of a vector covering mapping and a Lipschitz mapping is formulated and proved.

Key words: coincidence points; vector covering mappings; metric spaces.